ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ

Ρητός: Είναι κάθε αριθμός α, για τον οποίο υπάρχουν $p \in \mathbb{Z}$ και $q \in \mathbb{Z}^* : \alpha = \dfrac{p}{q}$.

Σύμφωνα με τον παραπάνω ορισμό:

- Όλοι οι ακέραιοι είναι ρητοί $\left(\text{π.χ. } -7 = \dfrac{-7}{1}\right)$
- Όλοι οι δεκαδικοί τερματιζόμενοι είναι ρητοί $\left(\text{π.χ. } 2{,}753 = \dfrac{2753}{1000}\right)$
- Όλοι οι δεκαδικοί περιοδικοί είναι ρητοί.

  Για παράδειγμα, αν έχω τον αριθμό

$$\alpha = 5{,}23741741741741741\ldots$$

Τότε $100.000\alpha = 523741{,}741741741741\ldots$

$$100\alpha = \quad 523{,}741741741741\ldots$$

Με αφαίρεση κατά μέλη θα έχω:

$$100.000\alpha - 100\alpha = 523741{,}741741\ldots - 523{,}741741\ldots$$

ή $$99.900\alpha = 523118{,}00000\ldots$$

ή $$\boxed{a = \dfrac{523118}{99.900}}$$

Υπό ευρείαν έννοια, μπορούμε να δεχθούμε, ότι και οι ακέραιοι και οι δεκαδικοί τερματιζόμενοι είναι περιοδικοί με περίοδο το 0 ή και το 9

π.χ. $5 = 5{,}0000000\ldots$

$2{,}47 = 2{,}470000000\ldots$

$5 = 4{,}9999999\ldots$

$2{,}47 = 2{,}46999999\ldots$.

Έτσι μπορούμε να ισχυρισθούμε ότι:

"Ρητοί είναι οι (υπό ευρείαν έννοια) δεκαδικοί περιοδικοί και μόνον αυτοί".

Χαρακτηριστή για την αντίληψή μας περί του πλήθους των δεκαδικών

τερματιζόμενων σε σχέση με τους ρητούς μή τερματιζόμενους περιοδικούς, είναι η παρακάτω παρατήρηση:

- Ένα ανάγωγο κλάσμα $\frac{p}{q}$, παριστάνει δεκαδικό τερματιζόμενο, αν και μόνο

αν $q = 2^{\mu} \cdot 5^{\nu}$ με $\mu \in$ Í , $\nu \in$ Í .

Σύμφωνα με την παραπάνω παρατήρηση, μπορούμε να ισχυρισθούμε, ότι “σχεδόν όλοι οι ρητοί, είναι περιοδικοί, ***ακόμα και υπό την στενή έννοια***”.

Παραδείγματα:

- $\frac{1}{7} = 0{,}\mathbf{142857\ 142857}\ldots$
- $\frac{3}{4} = \frac{3}{2^2} = \frac{3 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{75}{(2 \cdot 5)^2} = \frac{75}{10^2} = \frac{75}{100} = 0{,}75$
- $\frac{7}{5} = \frac{7 \cdot 2}{5 \cdot 2} = \frac{14}{10} = 1{,}4$
- $\frac{11}{20} = \frac{11}{2^2 \cdot 5} = \frac{11 \cdot 5}{2^2 \cdot 5^2} = \frac{55}{(2 \cdot 5)^2} = \frac{55}{100} = 0{,}55$.

Ουσιαστικά δηλαδή, δεκαδικούς τερματιζόμενους ***παριστάνουν μόνο τα κλάσματα*** που μπορούν να μετατραπούν σε ισοδύναμα με παρονομαστή δύναμη του 10.

Άρρητος: Είναι κάθε αριθμός α που δεν είναι ρητός.

Ύπαρξη αρρήτου: Ιστορικά η πρώτη ανακάλυψη αρρήτου αφορά τον $\sqrt{2}$, κάτι που έγινε από τους Πυθαγόρειους. Η απόδειξη της αρρητότητας του $\sqrt{2}$, επέφερε ***κλονισμό και κατάρρευση*** σε όλη τη φιλοσοφική θεώρηση και κοσμοαντίληψη των Πυθαγορείων, αφού πίστευαν ότι τα πάντα στη φύση περιγράφονται από ακέραιες αναλογίες.

Πρόταση 1. Ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Απόδειξη: Έστω ότι ο $\sqrt{2}$ είναι ρητός. Τότε υπάρχουν $p \in$ Ù και $q \in$ Ù* έτσι ώστε $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Μάλιστα, μπορώ να υποθέσω ότι $(p, q) = 1$, διότι κάθε κλάσμα δύναμαι να το απλοποιώ, καθιστώντας το ***ανάγωγο***.

Έτσι:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Rightarrow$$

$$(\sqrt{2})^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow$$

$$2q^2 = p^2 \Rightarrow \qquad (1)$$

ο p^2 είναι άρτιος $\Rightarrow$ (διότι κάθε περιττός δίνει περιττό τετράγωνο)

$$p = 2\lambda, \ \lambda \in \text{Í} \Rightarrow$$

$$p^2 = 4\lambda^2 \Rightarrow \qquad (1)$$

$$\cancel{2}q^2 = \overset{2}{\cancel{4}}\lambda^2 \Rightarrow$$

$$q^2 = 2\lambda^2 \Rightarrow$$

$$q^2 \text{ άρτιος } \Rightarrow$$

q άρτιος, όπερ άτοπον, αφού καταλήξαμε στο συμπέρασμα ότι p άρτιος και q άρτιος υποθέτοντας ότι τα p, q είναι πρώτοι μεταξύ τους.

Επομένως ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος.

Αλγεβρικός: Είναι κάθε αριθμός α, ο οποίος δύναται να είναι ρίζα ενός πολυωνύμου με ακεραίους συντελεστές.

Ανάγωγο Πολυώνυμο: Ένα πολυώνυμο $f(x)$ με ακέραιους συντελεστές θα λέγεται **ανάγωγο**, όταν για κάθε ανάλυση της μορφής $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ όπου τα $f_1(x)$, $f_2(x)$ είναι επίσης πολυώνυμα με ακεραίους συντελεστές, να έπεται ότι $f_1(x) =$ σταθερό πολυώνυμο ή $f_2(x) =$ σταθερό πολυώνυμο.

Με άλλα λόγια, ένα πολυώνυμο $f(x)$ με ακεραίους συντελεστές θα λέγεται **ανάγωγο** όταν **δεν μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο πολυωνύμων μικροτέρου βαθμού (βαθμού >0) που να έχουν επίσης ακεραίους**

συντελεστές.

Πρόταση: Αν $f(x)$ ανάγωγο πολυώνυμο βαθμού *n* και με $f(\alpha)=0$. Τότε το $f(x)$ είναι το ελαχιστοβάθμιο πολυώνυμο με ακεραίους συντελεστές που υπάρχει και έχει ως ρίζα τον *α*. (Η απόδειξη επαφίεται στον αναγνώστη).

Παραδείγματα:

- Ο $3/4$ είναι αλγεβρικός, διότι είναι ρίζα του πολυωνύμου $p(x)=4x-3$
- Ο $\sqrt{2}$ είναι αλγεβρικός, διότι είναι ρίζα του πολυωνύμου $q(x)=x^2-2$
- Ο $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ είναι αλγεβρικός, διότι είναι ρίζα του $\varphi(x)=x^4-4x^2+1$
- Ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι αλγεβρικός, διότι είναι ρίζα του $f(x)=x^3-2$.

Βαθμός ενός αλγεβρικού αριθμού ξ: Κάθε αλγεβρικός αριθμός *ξ*, χαρακτηρίζεται απ'τον βαθμό του και αυτός είναι ο βαθμός του ***ελαχιστοβαθμίου*** πολυωνύμου με ακεραίους συντελεστές του οποίου ο *ξ* είναι ρίζα.

Έτσι:

- Κάθε ρητός αριθμός είναι αλγεβρικός βαθμού 1, αφού αν $\xi=\dfrac{p}{q}$, τότε είναι

ρίζα του $Q(x)=q\cdot x-p$ ($p\in$ Ù, $q\in$ Ù*)

- Ο $\sqrt{2}$ είναι αλγεβρικός βαθμού 2, αφού είναι ρίζα του $p(x)=x^2-2$, ενώ δεν δύναται να είναι ρίζα πρωτοβαθμίου πολυωνύμου, διότι τότε αν ήταν, θα είχαμε

$$p\cdot\sqrt{2}+q=0\Rightarrow\sqrt{2}=-\frac{q}{p}\quad \text{και ο } \sqrt{2} \text{ ρητός, όπερ άτοπο.}$$

- Κάθε άρρητος αλγεβρικός, είναι βαθμού μεγαλύτερου της μονάδος.

Υπερβατικός: Είναι κάθε αριθμός *ξ* ο οποίος δεν είναι αλγεβρικός.

Ύπαρξη υπερβατικού: Ιστορικά, τον πρώτο υπερβατικό αριθμό τον κατασκεύασε το 1844 ο Liouville και είναι ο

$$\lim_{+\infty} x^{k+1} e^{-x} - 0^{k+1} e^{-0} + \int_0^{+\infty} x^{k+1} e^{-x} = (k+1)! \Rightarrow \text{(i)} .$$

Για την απόδειξη της υπερβατικότητας του παραπάνω αριθμού χρειάζεται πρώτα η απόδειξη της παρακάτω πρότασης:

Πρόταση 2 (Liouville)***:*** Αν ο ξ είναι αλγεβρικός βαθμού $\nu > 1$, τότε υπάρχει ακέραιος *M*, τέτοιος ώστε, για κάθε ρητό αριθμό $\frac{p}{q}$, να ισχύει $\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{Mq^{\nu}}$.

Απόδειξη: Αφού ξ αλγεβρικός βαθμού *ν*, υπάρχει πολυώνυμο $f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + ... + a_1 x + \alpha_0$ με βαθμό *ν*, και $f(\xi) = 0$.

Ισχυρισμός: Η εξίσωση $f(x) = 0$ δεν έχει ρητές ρίζες.

Πράγματι· αν το $f(x)$ είχε ως ρίζα το ρητό $\frac{\alpha}{\beta}$ διαιρείται με το $x - \frac{\alpha}{\beta}$ και τότε

$$f(x) = \left(x - \frac{\alpha}{\beta}\right) \cdot Q(x) , \quad \forall\ x \in \text{Ñ}$$

και

$$f(\xi) = \left(\xi - \frac{\alpha}{\beta}\right) \cdot Q(\xi) \Rightarrow \left(\xi - \frac{\alpha}{\beta}\right) \cdot Q(\xi) = 0 ,$$

και $\xi - \frac{\alpha}{\beta} \neq 0$ αφού ξ άρρητος και $\frac{\alpha}{\beta}$ ρητός.

Άρα $Q(\xi) = 0$, δηλ. ο ξ είναι ρίζα πολυωνύμου βαθμού $\nu - 1$, πράγμα άτοπο, αφού το ξ είναι αλγεβρικός βαθμού *ν*.

Παραγωγίζοντας το $f(x)$, λαμβάνω το $f'(x)$ το οποίο είναι επίσης πολυώνυμο $\nu - 1$ βαθμού.

Αν θεωρήσω το διάστημα $[\xi - 1, \xi + 1]$, τότε μπορώ να υποθέσω ότι το $f'(x)$ θα φράσεται σ'αυτό από τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή του $f'(x)$ στο ίδιο διάστημα. Δηλαδή

$$M_2 \le f(x) \le M_1 \quad \forall\ x \in [\xi - 1, \xi + 1] \qquad (1)$$

Θεωρώντας ως $M' = \max\{|M_1|, |M_2|\}$ η (1) γίνεται

$$-|M'| \le M_2 \le f'(x) \le M_1 \le |M'| \Rightarrow -|M'| \le f'(x) \le |M'|$$

$$\Rightarrow |f'(x)| \le |M'| \quad \forall\, x \in [\xi-1, \xi+1] \qquad (2)$$

Από το αξίωμα Αρχιμήδους-Ευδόξου (ακριβέστερα από πόρισμα αυτού) υπάρχει $M \in$ Í με $M \ge |M'|$. Έτσι η (2) δίνει

$$|f'(x)| \le M \quad \forall\, x \in [\xi-1, \xi+1]. \qquad (3)$$

Για τον τυχόντα ρητό $\frac{p}{q}$, $q > 0$ θα δείξω ότι

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \ge \frac{1}{M \cdot q^{\nu}}. \qquad (4)$$

Η (4) είναι προφανές ότι ισχύει αν $\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > 1$.

Θα δείξω την ισχύ της (4) αν $\left|\xi - \frac{p}{q}\right| \le 1$, δηλαδή για όσους ρητούς απέχουν απ'το ξ απόσταση μικρότερη ή ίση της μονάδος. (Γι'αυτό άλλωστε έχω επιλέξει και το διάστημα $[\xi-1, \xi+1]$). Για το οποιοδήποτε $\frac{p}{q}$ που ανήκει στο προηγούμενο διάστημα, μπορώ να θεωρήσω το Θεώρημα της Μέσης Τιμής του διαφορικού λογισμού για το διάστημα $\left[\xi, \frac{p}{q}\right]$ ή $\left[\frac{p}{q}, \xi\right]$.

Σύμφωνα μ'αυτό, υπάρχει $\gamma \in \left[\xi, \frac{p}{q}\right]$ ή $\gamma \in \left[\frac{p}{q}, \xi\right]$:

$$f'(\gamma) = \frac{f(\xi) - f\left(\frac{p}{q}\right)}{\xi - \frac{p}{q}} = \frac{f\left(\frac{p}{q}\right) - f(\xi)}{\frac{p}{q} - \xi}$$

ή

$$|f'(\gamma)| = \frac{\left|f(\xi) - f\left(\frac{p}{q}\right)\right|}{\left|\xi - \frac{p}{q}\right|} \Rightarrow$$

$$\left| f(\xi) - f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = | f'(\gamma) | \cdot \left| \xi - \frac{p}{q} \right| \Rightarrow \ (f(\xi) = 0 \text{ διότι } \xi \text{ ρίζα του } f(x))$$

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| = | f'(\gamma) | \left| \xi - \frac{p}{q} \right| \Rightarrow \tag{3}$$

$$\left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| \le M \cdot \left| \xi - \frac{p}{q} \right| \Rightarrow$$

$$q^{\nu} \cdot \left| f\left(\frac{p}{q}\right) \right| \le q^{\nu} \cdot M \cdot \left| \xi - \frac{p}{q} \right| \Rightarrow$$

$$\left| q^{\nu} \cdot f\left(\frac{p}{q}\right) \right| \le q^{\nu} \cdot M \cdot \left| \xi - \frac{p}{q} \right|. \tag{5}$$

Ισχύει ότι $f\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$ από τον ισχυρισμό που αποδείξαμε στην αρχή. Άρα το α΄ μέλος της (5) είναι ακέραιος $\neq 0$.

Δηλαδή $\left| q^{\nu} \cdot f\left(\frac{p}{q}\right) \right| \ge 1$ και η (5) δίνει

$$q^{\nu} \cdot M \cdot \left| \xi - \frac{p}{q} \right| \ge 1 \Rightarrow \left| \xi - \frac{p}{q} \right| \ge \frac{1}{q^{\nu} \cdot M}. \tag{6}$$

Το α΄ μέλος της (6) είναι άρρητος (βαθμός της $\xi \neq n > 1$) ενώ το β΄ μέλος είναι ρητός.

Επομένως δεν ισχύει η ισότητα.

Έτσι έχουμε το αποδεικτέο, δηλαδή

$$\left| \xi - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{q^{\nu} \cdot M}.$$

Πρόταση 3 (Liouville)***:*** Ο αριθμός $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^{k!}}$ είναι υπερβατικός.

Απόδειξη: Θεωρούμε τον *N* αυθαίρετο φυσικό. Για $\nu > N$ συμβολίζουμε με

$$\xi_{\nu} = \frac{1}{10^{1!}} + \frac{1}{10^{2!}} + \frac{1}{10^{3!}} + \cdots + \frac{1}{10^{\nu!}} = \frac{p}{q}$$

με $q = 10^{\nu!}$ και $p = 10^{\nu!-1!} + 10^{\nu!-2!} + 10^{\nu!-3!} + \cdots + 10^{\nu!-(\nu-1)!} + 1$.

Ισχύει:

$$0<\xi-\frac{p}{q}=\xi-\xi_v=10^{-(v+1)!}+10^{-(v+2)!}+10^{-(v+3)!}+\cdots+10^{-(v+k)!}+\cdots$$

$$\begin{aligned}
&=10^{-(v+1)!}\cdot\left[1+10^{-(v+2)}+10^{-(v+2)(v+3)}+\cdots+10^{-(v+2)(v+3)\cdots(v+k)}+\cdots\right]\\
&<10^{-(v+1)!}\cdot\left[1+2^{-(v+2)}+2^{-(v+2)(v+3)}+\cdots+2^{-(v+2)(v+3)\cdots(v+k)}+\cdots\right]\\
&<10^{-(v+1)!}\cdot\left[1+2^{-1}+2^{-3}+\cdots+2^{-k}+\cdots\right]\\
&=10^{-(v+1)!}\cdot 2\\
&<10^{-v!}\cdot 2\\
&=2\cdot q^{-v!}\\
&<2\cdot q^{-v}\\
&<2\cdot q^{-N}.
\end{aligned}$$

Δηλαδή τελικά $\left|\xi-\frac{p}{q}\right|<2\cdot q^{-N}$.

Όμως, από την πρόταση 2 και το αμέσως προηγούμενο συμπέρασμα, μπορούμε να ισχυρισθούμε ότι ο ξ δεν είναι αλγεβρικός βαθμού μικρότερου του N.

Πράγματι· αν ο ξ ήταν αλγεβρικός βαθμού μικρότερου του N, έστω $v'<N$ $(N-v'>1)$. Τότε $\forall\frac{p}{q}$ ρητό $\exists\, M\in$ Í :

$$\left|\xi-\frac{p}{q}\right|>\frac{1}{M\cdot q^{v'}} \tag{1}$$

και για τους συγκεκριμένους $\frac{p}{q}=\xi_v$ ισχύει

$$\left|\xi-\frac{p}{q}\right|<2\cdot q^{-N}. \tag{2}$$

Από την (1) και (2) έχω:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Mq^{v'}}<2q^{-N}&\Rightarrow\frac{1}{Mq^{v'}}<\frac{2}{q^N}\\
&\Rightarrow q^N<2Mq^{v'}\\
&\Rightarrow q^{N-v'}<2M
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow (10^{\nu!})^{N-\nu'} < 2M \quad \forall\ \nu > N\,.$$

Άτοπο, διότι αρκούντως μεγάλο ν, υπερβαίνει τον $2M$.

Έτσι έχουμε ότι ο ξ δεν είναι αλγεβρικός βαθμού μικρότερου του N και ο N αυθαίρετος.

Άρα ο ξ δεν έχει βαθμό μικρότερο του N, για κάθε N, πράγμα άτοπο, διότι ό,τι βαθμό και να είχε ο ξ, κάποιος N θα τον υπερέβαινε.

Άρα ο ξ δεν είναι αλγεβρικός, είναι δηλαδή υπερβατικός.

Αριθμός Liouville: Λέγεται ένας αριθμός ξ, όταν είναι άρρητος και εάν για κάθε φυσικό αριθμό ν, υπάρχουν p και q $(q > 1)$ τέτοιοι ώστε: $\left|\xi - \dfrac{p}{q}\right| < \dfrac{1}{q^\nu}$.

Πρόταση 4: Κάθε αριθμός Liouville είναι υπερβατικός.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι κάποιος αριθμός Liouville ξ, είναι αλγεβρικός, βαθμού ν.

Τότε $\nu > 1$, αφού ο ξ άρρητος.

Από την πρόταση 2, έχουμε ότι $\exists\ M \in \mathbb{N}^*$ έτσι ώστε

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{Mq^\nu} \tag{1}$$

για κάθε p, q ακεραίους με $q > 0$.

Επιλέγω $k \in \mathbb{N}$:

$$2^k \geq 2^\nu \cdot M\,. \tag{*}$$

Επειδή ο ξ είναι αριθμός Liouville, υπάρχουν p, q ακέραιοι $(q > 1)$ με

$$\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^k}\,. \tag{2}$$

Από (1) και (2) έχω $\dfrac{1}{q^k} > \dfrac{1}{Mq^\nu} \Rightarrow Mq^\nu > q^k \Rightarrow M > q^{k-\nu} \geq 2^{k-\nu} \underset{(*)}{\geq} M$ άτοπο.

Άρα κάθε αριθμός Liouville είναι υπερβατικός.

ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΠΟΥ ΣΥΝΕΒΑΛΑΝ ΣΤΗΝ ΠΡΟΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΜΕΛΕΤΗΣ ΤΩΝ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΚΑΙ ΥΠΕΡΒΑΤΙΚΩΝ

Θεώρημα των A. Thue-C.L. Siegel-K.F. Roth: "Αν ξ είναι αλγεβρικός αριθμός βαθμού $\nu > 1$, και p, q ακέραιοι με $q > 0$, τότε η ανίσωση $\left|\xi - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^k}$ έχει πεπερασμένο πλήθος λύσεων σε ακεραίους p, q, για κάθε $k > 2$".

Cantor (1873): "Το σύνολο των αλγεβρικών αριθμών είναι αριθμήσιμο, ενώ το σύνολο των υπερβατικών υπεραριθμήσιμο".

- Πρακτικά η προηγούμενη πρόταση σημαίνει ότι οι υπερβατικοί είναι "πάρα πολύ περισσότεροι" από τους αλγεβρικούς ή αλλοιώς, η πιθανότητα να επιλέξουμε αλγεβρικό τυχαία ανάμεσα από τους πραγματικούς, είναι 0 (!)

Weierstrass: " Αν $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_\nu$ διαφορετικοί ανά δύο αλγεβρικοί, και $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_\nu$ διαφορετικοί από το 0, τότε $\beta_1 \cdot e^{\alpha_1} + \beta_2 \cdot e^{\alpha_2} + ... + \beta_\nu \cdot e^{\alpha_\nu} \neq 0$".

Πρόβλημα-Ερώτημα του Hilbert (1900): "Αν ξ αλγεβρικός με $\xi \neq 0$ και $\xi \neq 1$ και β άρρητος αλγεβρικός, τότε ο ξ^β είναι υπερβατικός ?".

- Καταφατική απάντηση δόθηκε το 1934 από τους Gel'fand-Schneider και έτσι γνωρίζουμε σήμερα ότι αριθμοί της μορφής π.χ. $2^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}^{\sqrt{3}}$ είναι υπερβατικοί.
- Η βασική τεχνική που δημιουργήθηκε την ίδια εποχή για την απόδειξη της υπερβατικότητας ενός αριθμού $\xi' = \xi^\beta$ συνίσταται στην απόδειξη του ότι

$$\beta \ell n\xi - \ell n\xi' \neq 0 .$$

Γενικότερα απεδείχθη το εξής:

A. Baker (1966): "Αν $\xi_1,\xi_2,...,\xi_\nu$ και $\beta_1,\beta_2,...,\beta_\nu$ είναι μη μηδενικοί αλγεβρικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε οι $\ell n\xi_1,\ell n\xi_2,...,\ell n\xi_\nu$ να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία υπεράνω του Đ, τότε $\beta_1\ell n\xi_1+\beta_2\ell n\xi_2+...+\beta_\nu\ell n\xi_\nu\neq 0$".

Η ΑΡΡΗΤΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ *e*

Πρόταση 5: Ο αριθμός *e* είναι άρρητος.

Απόδειξη: Από το ανάπτυγμα κατά Taylor της συνάρτησης e^x έχομε:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^\nu}{\nu!} + \ldots \; .$$

Για $x = 1$ έχομε:

$$e^1 = e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{\nu!} + \ldots \Rightarrow$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{\nu!} + \left(\frac{1}{(\nu+1)!} + \frac{1}{(\nu+2)!} + \frac{1}{(\nu+3)!} + \ldots \right) \Rightarrow$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{\nu!} + R_\nu \, . \qquad (1)$$

Θα αποδείξουμε ότι: $0 < R_\nu < \dfrac{2}{(\nu+1)!}$.

Πράγματι· $R_\nu > 0$, προφανώς ως άθροισμα θετικών όρων.

Επίσης

$$R_\nu = \frac{1}{(\nu+1)!} + \frac{1}{(\nu+2)!} + \frac{1}{(\nu+3)!} + \ldots \Rightarrow$$

$$R_\nu = \frac{1}{(\nu+1)!} \left[1 + \frac{1}{\nu+2} + \frac{1}{(\nu+2)(\nu+3)} + \ldots \right] \Rightarrow$$

$$R_\nu < \frac{1}{(\nu+1)!} \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots \right] \Rightarrow$$

(άθροισμα απείρων όρων Γ.Π. με $\alpha_1 = 1$ και $\lambda = 1/2$)

$$R_\nu < \frac{2}{(\nu+1)!} \, .$$

Υποθέτουμε ότι ο *e* είναι ρητός. Τότε

$$e = \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{με} \quad \alpha, \beta \quad \text{θετικούς ακέραιους.}$$

Μπορούμε να θεωρήσουμε ($\nu > \beta$ και $\nu > 2$) $\nu \in$ Í . Τότε η (1) δίνει:

$$e = \frac{\alpha}{\beta} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{\nu!} + R\nu \Rightarrow \frac{\nu! \cdot \alpha}{\beta} = \nu! + \nu! + \frac{\nu!}{2!} + \ldots + \frac{\nu!}{\nu!} + \nu! \cdot R\nu$$

Στην παραπάνω ισότητα είναι παρατηρητέα τα εξής:

- Το αριστερό μέλος είναι ακέραιος (διότι $\nu > \beta$ και άρα το β είναι παράγοντας του $\nu!$)
- Το δεξιό μέλος αποτελείται από άθροισμα ακεραίων όρων πλην του τελευταίου όρου $\nu! R_\nu$. Όμως έτσι, και ο τελευταίος όρος $\nu! R_\nu$ πρέπει υποχρεωτικά να είναι ακέραιος (ως διαφορά ακεραίων αν μεταφέρουμε τους υπόλοιπους προσθετέους στο α΄ μέλος).

Άρα

$$\left.\begin{array}{r} \nu! R_\nu \quad \text{ακέραιος} \\ \text{και} \quad 0 < R_\nu < \dfrac{2}{(\nu+1)!} \end{array}\right\} \Rightarrow 0 < \nu! \cdot R_\nu < \nu! \frac{2}{(\nu+1)!}$$

$$\Rightarrow 0 < \nu! \cdot R_\nu < \frac{2}{\nu+1} \underset{(\nu>2}{<} \frac{2}{3} < 1 .$$

Δηλαδή ο ακέραιος $\nu! R_\nu$ ευρίσκεται μεταξύ 0 και 1, πράγμα άτοπο.

Επομένως ο e άρρητος.

Η ΑΡΡΗΤΟΤΗΤΑ ΤΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ *π*

Για την απόδειξη της αρρητότητας του π θα χρειασθούμε κάποιες βοηθητικές προτάσεις-λήμματα, τα οποία θα χρησιμοποιηθούν στο σώμα της απόδειξης και τα οποία παραθέτουμε:

Λήμμα Ι: Για την συνάρτηση $f_n(x) = \dfrac{x^n(1-x)^n}{n!}$, $n \in$ Í (1) ισχύουν:

i. $0 < f_n(x) < \dfrac{1}{n!}$, και $0 < x < 1$

ii. $f_n(x) = \dfrac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n}{k} x^{n+k}$

iii. $f_n^{(m)}(0) = 0$ αν $m < n$ ή $m > 2n$

$f_n^{(m)}(0) =$ ακέραιος αν $n \le m \le 2n$

iv. $f_n(x) = f_n(1-x)$ και

$f_n^{(m)}(x) = (-1)^m f_n^{(m)}(1-x)$ και $f_n^{(m)}(1) =$ ακέραιος, για κάθε m.

(i) ***Απόδειξη του ότι*** $\boldsymbol{0 < f_n(x) < \dfrac{1}{n!} \quad \forall\, x \in (0,1)}$

Έχω

$$
\begin{aligned}
0 <\ & x < 1 \Rightarrow \\
0 >\ & -x > -1 \Rightarrow \\
1+0 >\ & 1-x > 1-1 \Rightarrow \\
1 >\ & 1-x > 0
\end{aligned}
$$

Με πολλαπλασιασμό κατά μέλη πρώτης-τελευταίας, έχομε:

$$
\begin{aligned}
&0 < x(1-x) < 1 \Rightarrow \begin{pmatrix}\text{Με πολ/σμό με τον εαυτό της} \\ n-1 \text{ φορές}\end{pmatrix} \\
&0^n < x^n(1-x)^n < 1^n \Rightarrow \\
&0 < x^n(1-x)^n < 1 \Rightarrow \\
&\frac{0}{n!} < \frac{x^n(1-x)^n}{n!} < \frac{1}{n!} \Rightarrow \\
&\boxed{0 < f_n(x) < \frac{1}{n!}}
\end{aligned}
$$

(ii) ***Απόδειξη του ότι*** $\boldsymbol{f_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \cdot \binom{n}{k} x^{n+k}}$

Με χρήση του αναπτύγματος του Διωνύμου του Νεύτωνος έχομε:

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}x^n \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(-1)^k x^k \Rightarrow f_n(x) = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k x^{n+k}$$

(iii) Γενικά μπορούμε να αποδείξουμε επαγωγικά, ότι

$$(x^p)^{(m)} = p(p-1)(p-2)...(p-m+1)x^{p-m}.$$

Από το παραπάνω, είναι φανερά τα εξής:

- Όταν η τάξη παραγώγισης $m = p$, τότε

$$(x^p)^{(m)} = p(p-1)(p-2)...2\cdot 1\cdot x^0$$

$$(x^p)^{(m)} = p!$$

- Όταν $m > p$, τότε $(x^p)^{(m)} = 0$
- Όταν $m < p$ έχομε ένα μη μηδενικό μονώνυμο του x, δηλαδή

$$(x^p)^{(m)} = p(p-1)(p-2)...(p-m+1)x^{p-m}.$$

Από την (ii), έχομε ότι η $f_n(x)$ μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$f_n(x) = \frac{1}{n!}[c_0x^n + c_1x^{n+1} + c_2x^{n+2} + ... + c_nx^{2n}]$$

όπου $c_0, c_1, c_2 ... c_{2n}$ ακέραιοι.

Έτσι:

- Αν η τάξη παραγώγισης m είναι μικρότερη από n, τότε η αγκύλη αποτελείται **μόνο** από μη μηδενικά μονώνυμα του x, συνεπώς

$$f_n^{(m)}(0) = \frac{1}{n!}[0+0+...+0] = 0 \quad (m < n).$$

- Αν η τάξη παραγώγισης m είναι μεγαλύτερη από το $2n$, τότε όλα τα μονώνυμα της αγκύλης είναι ήδη 0 και βεβαίως

$$f_n^{(m)}(0) = 0, \quad (m > 2n).$$

- Αν η τάξη παραγώγισης m είναι μεταξύ n και $2n$ συμπεριλαμβανομένων, τότε:

$$f_n^{(n)}(x)=\frac{1}{n!}[c_0 n!+ \text{ μονώνυμα του } x]$$

$$f_n^{(n+1)}(x)=\frac{1}{n!}[0+c_1(n+1)!+ \text{ μονώνυμα του } x]$$

$$f_n^{(n+2)}(x)=\frac{1}{n!}[0+0+c_2(n+2)!+ \text{ μονώνυμα του } x]$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f_n^{(2n)}(x)=\frac{1}{n!}[0+0+...0+c_{2n}\cdot(2n)!]$$

Έτσι, για $x=0$ έχω

$$f_n^{n}(0)=\frac{1}{n!}c_0 n!$$

$$f_n^{n+1}(0)=\frac{1}{n!}c_2(n+1)!$$

……………………

$$f_n^{(2n)}(0)=\frac{1}{n!}c_{2n}(2n)!$$

Οι οποίοι, είναι όλοι ακέραιοι.

(iv) Στην αρχική συνάρτηση, θέτωντας στη θέση του *x*, το $1-x$, θα έχομε:

$$f_n(1-x)=\frac{(1-x)^n[1-(1-x)]^n}{n!}=\frac{(1-x)^n x^n}{n!}=f_n(x).$$

Παραγωγίζουμε χρησιμοποιώντας τον κανόνα της αλυσίδας (σύνθεσης συναρτήσεων) και έχω:

$$f_n^{(1)}(x)=f_n^{(1)}(1-x)\cdot(1-x)'=(-1)^1\cdot f_n^{(1)}(1-x)$$

$$f_n^{(2)}(x)=(-1)^1\cdot f^{(2)}(1-x)\cdot(1-x)'=(-1)^2\cdot f^{(2)}(1-x)$$

$$f_n^{(3)}(x)=(-1)^2\cdot f^{(3)}(1-x)\cdot(1-x)'=(-1)^3\cdot f^{(3)}(1-x)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f_n^{(m)}(x)=(-1)^{m-1}\cdot f^{(m)}(1-x)\cdot(1-x)'=(-1)^m\cdot f_n^{(m)}(1-x) \qquad \text{ό.ε..δ.}$$

Επίσης απ'την τελευταία σχέση για $x=1$ έχομε:

$$f_n^{(m)}(1)=(-1)^m\cdot f_n^{(m)}(0)\underset{\text{(iii)}}{=} \text{ ακέραιος, } \forall\ m.$$

Λήμμα ΙΙ: Αν $\alpha \in$ Ñ και $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει

$$n_0' : \frac{\alpha^n}{n!} < \varepsilon \quad \forall\ n > n_0'$$

Απόδειξη: Αν θεωρήσουμε $n \geq |\,2a\,|$ (*) τότε

$$\left|\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \left|\frac{a}{n+1}\right| \cdot \left|\frac{a^n}{n!}\right| \underset{(*)}{<} \frac{1}{2}\left|\frac{a^n}{n!}\right|.$$

Γενικά για κάποιο συγκεκριμένο $n_0 \geq |\,2a\,|$ θα έχω διαδοχικά:

$$\left|\frac{a^{n_0+1}}{(n_0+1)!}\right| < \frac{1}{2}\left|\frac{a^{n_0}}{n_0!}\right|$$

$$\left|\frac{a^{n_0+2}}{(n_0+2)!}\right| < \frac{1}{2}\left|\frac{a^{n_0+1}}{(n_0+1)!}\right| < \frac{1}{2^2}\left|\frac{a^{n_0}}{n_0!}\right|$$

$$\vdots$$

$$\left|\frac{a^{n_0+k}}{(n_0+k)!}\right| < \frac{1}{2^k}\left|\frac{a^{n_0}}{n_0!}\right|. \qquad (1)$$

Η (1) ισχύει για κάθε $k \in$ Í . Το β΄ μέλος της (1) είναι μια μηδενική ακολουθία, αφού

$$\left.\begin{cases} \dfrac{1}{2^k} \to 0 \\ \left|\dfrac{a^{n_0}}{n_0!}\right| = c\,t \end{cases}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2^k}\left|\frac{a^{n_0}}{n_0!}\right| \to 0.$$

Έτσι το α΄ μέλος της (1), είναι μια ακολουθία που φράσσεται απολύτως, από μηδενική. Επομένως θα είναι κι'αυτή μηδενική. Δηλαδή

$$\frac{a^{n_0+k}}{(n_0+k)!} \to 0 \ \ \forall\ k \in \text{Í}^* \quad \text{ή} \quad \frac{a^n}{n!} \to 0 \ \ \forall\ n > n_0 \quad \text{ή} \quad \frac{a^n}{n!} \to 0 \ \ \forall\ n \in \text{Í}^*.$$

Έτσι, για δεδομένο $\varepsilon > 0$, θα επιλέγουμε $n_0 > |\,2a\,|$ και στη συνέχεια

$$k_0 : \frac{1}{2^{k_0}}\left|\frac{a^{n_0}}{n_0!}\right| < \varepsilon \qquad \text{ή}$$

$$k_0 : \left|\frac{a^{n_0}}{n_0!}\right| < 2^{k_0}\,\varepsilon \qquad \text{ή}$$

$$k_0 : \left|\frac{a^{n_0}}{n_0!}\right| \frac{1}{\varepsilon} < 2^{k_0} \qquad \text{το οποίο υπάρχει.}$$

Τότε, το ζητούμενο n_0' θα είναι το $n_0 + k_0$ και

$$\left|\frac{a^n}{n!}\right| < \varepsilon \;\; \forall\, n > n_0 + k_0 = n_0' .$$

Λήμμα ΙΙΙ: Εάν π^2 είναι άρρητος, τότε και π άρρητος.

Απόδειξη: Έστω ότι π ρητός. Τότε έχω $p, q \in \mathbb{Z}$:

$$\pi = \frac{p}{q} \Rightarrow \pi^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Rightarrow \pi^2 = \frac{p^2}{q^2} \text{ ρητός όπερ άτοπον.}$$

Άρα ο π είναι άρρητος.

Πρόταση 6: Ο αριθμός π^2 είναι άρρητος.

Απόδειξη: Έστω ότι π^2 ρητός. Τότε υπάρχουν $\alpha \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}^*$:

$$\pi^2 = \frac{a}{b}.$$

Ορίζω τη συνάρτηση G ως εξής:

$$G(x) = b^n \left[\pi^{2n} f_n^{(0)}(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(2)}(x) + \pi^{2n-4} f_n^{(4)}(x) - \ldots + (-1)^n f_n^{(2n)}(x)\right]. \qquad (1)$$

Αν θεωρήσουμε ότι εφαρμόζεται η επιμεριστική ιδιότητα στην (1), τότε για τους συντελεστές θα έχω:

$$b^n \pi^{2n-2k} = b^n (\pi^2)^{n-k} = b^n \left(\frac{a}{b}\right)^{n-k} = \frac{b^n a^{n-k}}{b^{n-k}} = a^{n-k} b^k .$$

Δηλαδή, όλοι οι συντελεστές είναι ακέραιοι αριθμοί. Επίσης από λήμμα Ι (iii) και (iv) έχω ότι

$$f_n^{(m)}(0) \quad \text{και} \quad f_n^{(m)}(1) \quad \text{ακέραιοι} \quad \forall\, m .$$

Από τα προηγούμενα, ευθέως προκύπτει, ότι

$$G(0) \quad \text{και} \quad G(1) \quad \text{είναι ακέραιοι.}$$

Παραγωγίζουμε δύο φορές την $G(x)$ και έχομε:

$$G''(x) = b^n \left[\pi^{2n} f_n^{(2)}(x) - \pi^{2n-2} f_n^{(4)}(x) + \ldots + (-1)^n f_n^{(2n+2)}(x)\right]. \qquad (2)$$

Παρατηρούμε ότι ο τελευταίος όρος της (2) $(-1) f_n^{(2n+2)}(x) = 0$ διότι η τάξη

παραγώγισης έχει υπερβεί το $2n$. (Λήμμα Ι (iii)).

Πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη της (1) με π^2 και στη συνέχεια την προσθέτουμε κατά μέλη με την (2), όπου μετά τις απλοποιήσεις λαμβάνουμε:

$$G''(x)+\pi^2 G(x)=b^n \pi^{2n+2} f_n(x) \Rightarrow$$

$$G''(x)+\pi^2 G(x)=b^n \left(\frac{a}{b}\right)^{n+1} f_n(x) \Rightarrow$$

$$G''(x)+\pi^2 G(x)=b^n \frac{a^{n+1}}{b^{n+1}} f_n(n) \Rightarrow$$

$$G''(x)+\pi^2 G(x)=\pi^2 a^n f_n(x). \tag{3}$$

Θέτουμε $H(x)=G'(x)\eta\mu(\pi x)-\pi G(x)\sigma\upsilon\nu(\pi x)$.

Παραγωγίζοντας της $H(x)$ λαμβάνουμε:

$$H'(x)=[G''(x)\cdot \eta\mu\pi x+\pi\sigma\upsilon\nu\pi x\cdot G'(x)]-\pi\cdot[G'(x)\sigma\upsilon\nu\pi x\text{-}\pi G(x)\eta\mu\pi x]\Rightarrow$$

$$H'(x)=G''(x)\eta\mu\pi x+\pi\sigma\upsilon\nu\pi x\cdot G'(x)-\pi\cdot G'(x)\sigma\upsilon\nu\pi x+\pi^2 G(x)\eta\mu\pi x\Rightarrow$$

$$H'(x)=[G''(x)+\pi^2 G(x)]\eta\mu\pi x\Rightarrow \quad (\text{λόγω (3)})$$

$$H'(x)=\pi^2\cdot a^n f_n(x)\cdot\eta\mu\pi x\Rightarrow$$

$$\int_0^1 H'(x)dx=\int_0^1 \pi^2 a^n f_n(x)\eta\mu\pi x dx\Rightarrow$$

$$H(1)-H(0)=\pi^2\int_0^1 a^n f_n(x)\eta\mu\pi x dx\Rightarrow$$

$$(G'(1)\eta\mu\pi-\pi G(1)\sigma\upsilon\nu\pi)-(G'(0)\eta\mu 0-\pi\cdot G(0)\sigma\upsilon\nu 0)=\pi^2\int_0^1 a^n f_n(x)\eta\mu\pi x dx\Rightarrow$$

$$\not\pi\cdot[(G(1)+G(0)]=\pi^2\int_0^1 a^n f_n(x)\eta\mu\pi x dx\Rightarrow$$

$$(G(1)+G(0)=\pi\cdot\int_0^1 a^n f_n(x)\eta\mu\pi x dx. \tag{4}$$

Το α΄ μέλος της (4) είναι ακέραιος αριθμός, άρα και το β΄.

Εξάλλου από το Λήμμα Ι (i) ισχύει:

$$0<f_n(x)<\frac{1}{n!}, \quad \text{για} \quad 0<x<1\Rightarrow$$

$$0\cdot\pi a^n\eta\mu\pi x<\pi a^n\eta\mu x\cdot f_n(x)<\frac{\pi a^n}{n!}, \text{ για } 0<x<1\Rightarrow$$

$$\int_0^1 0dx < \pi\int_0^1 a^n f_n(x)\eta\mu\pi x dx < \int_0^1 \frac{\pi a^n}{n!}dx \Rightarrow$$

$$0 < \pi\int_0^1 a^n f_n(x)\eta\mu\pi x dx < \frac{\pi a^n}{n!} \qquad (5)$$

Η σχέση (5) ισχύει για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Σύμφωνα με το λήμμα ΙΙ, υπάρχει n_0, έτσι ώστε

$$\frac{\pi a^n}{n!} < 1 \quad \forall\ n > n_0 .$$

Έτσι η (5), αφού λάβουμε υπ'όψιν και την (4) δίνει ακέραιο μεταξύ 0 και 1, πράγμα που είναι άτοπο.

Επομένως ο π^2 είναι άρρητος και από Λήμμα ΙΙΙ έπεται ότι π άρρητος.